UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH — Année 2019/2020
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE FÈS
CYCLE PRÉPARATOIRE — CP1 S_2
MATIÈRE : ALGBREII

TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIE 3

Exercice 1 Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.
Déterminer dans $\mathbb{C}[X]$, le reste de la division euclidienne du polunôme $(\mathbf{X+1})^{\mathbf{n}} - \mathbf{x^n} - \mathbf{1}$ par :

$$\mathbf{1}.\ X^2-3X+2, \quad \mathbf{2}.\ X^2+X+1, \quad \mathbf{3}.\ X^2-2X+1.$$

(**Indications** : déterminer a,b tels que $(X+1)^n - x^n - 1 = (X^2-3X+2)Q(X)+aX+b$, en considérant les racines de X^2-3X+2)

Exercice 2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$.
Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ sachant que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)$ vaut 1 et que le reste de la division euclidienne de P par $(X-b)$ vaut -1 ?

(**Indications** : déterminer a,b tels que $P(X) = (X-a)(X-b)Q(X)+aX+b$, en considérant que $P(a)=1$ et que $P(b)=-1$.)

Exercice 3 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. Exprimer R en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 4 Soient A, B et P des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que P est non constant. Montrer que si $A \circ P$ divise $B \circ P$ alors A divise B.

(**Indications** : écrire $B = AQ+R$ avec $deg(R) < deg(A)$, puis composer par P et en déduire que $R=0$ en considérant le degré de $R \circ P$.)

Exercice 5 Démontrer que
1. $X^{n+1}cos((n-1)\theta) - X^n cos(n\theta) - Xcos(\theta)+1$ est divisible par $X^2-2Xcos(\theta)+1$.
2. $nX^{n+1} - (n+1)X^n - 1$ est divisible par $(X-1)^2$.

(**Indications** : il suffit de prouver que les racines complexes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ de $X^2-2Xcos(\theta)+1$ sont racines de $X^{n+1}cos((n-1)\theta) - X^n cos(n\theta) - Xcos(\theta)+1$, pour cela utiliser les formules de transformation trigonométriques.)

Exercice 6 On considère dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^9+X^6+X^3+1$.
Décomposer P en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 7 Décomposer en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

$$\mathbf{1}.\ X^4+1 \quad \mathbf{2}.\ X^4-1 \quad \mathbf{3}.\ (X^2-X+1)^2+1$$

(**Indications** : on cherche d'abord les racines complexes pour factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis on regroupe les racines complexes conjuguées.)

Exercice 8 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note pour $p < n$, u_p la somme des racines de $P^{(p)}$.
Démontrer que $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$ forme une progression arithmétique et déterminer sa raison.

(**Indications** : on écrit $P(X)$ sous la forme usuelle et on dérive à l'ordre p et par les relations coéfficients-racines on détermine u_p, puis on montre que (u_p) est arithmétique.)

Exercice 9

1. Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.
2. Soit $Q(X) = X^4 + 12X - 5$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de Q, sachant que $x_1 + x_2 = 2$.
   a. Déterminer x_1x_2, x_3x_4, et $x_2 + x_4$.
   b. En déduire les valeurs des racines.

(**Indications** : utiliser les relations coéfficients-racines, on trouve que $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ puis on en déduit la valeur de x_3 et par factorisation on trouve les autres racines. Et pour la deuxième question, on développe $(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$ et par identification on trouve un système à résoudre.)

Exercice 10 Déterminer les racines du polynôme $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que les racines sont en progression arithmétique.
(**Indications** : on écrit $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sous la forme $8(X - (a - r))(X - a)(X - (a + r))$ et on identifie.)